GEOMETRÍA DINÁMICA: EL CASO DE LA FUNCIÓN SENO

Marcela Ferrari Escolá, Diana Lluck Soberanis, Gustavo A. Meneses Cisneros
Universidad Autónoma de Guerrero. CBTys 14. (México)
mferrari@uagro.mx, dianalluck@hotmail.com

RESUMEN: Presentamos un acercamiento a la función seno involucrando una construcción geométrica en GeoGebra. Cobijamos nuestra investigación en la sociepistemología siendo la “experiencia de enseñanza” la metodología utilizada. El diseño de aprendizaje provoca un uso intuitivo de los radianes así como una discusión de los parámetros que se involucran en la expresión analítica de esta función al manipular la gráfica lograda. Reportamos un primer análisis de los datos recogidos al invitar a doce estudiantes de bachillerato tecnológico mexicano a construir geométricamente la función seno, donde la medida del ángulo no involucre razones trigonométricas sino su lectura directa en radianes. Todos los equipos reconocen, por la “forma”, una “onda” que asocian con la función seno en la primera sesión del experimento de enseñanza. Nos enfocamos en la producción de uno de los equipos el cual discierne que la medida del arco representa el ángulo medido sin reconocerlo como radianes, argumentando desde la definición de seno (relación trigonométrica) que conocen.

Palabras clave: socioepistemología, función seno, geoGebra

ABSTRACT: We present an approach to the sine function involving a geometric construction in GeoGebra. We base our research on socio-epistemology, being the "teaching experience” the methodology used. The learning design causes an intuitive use of radians as well as a discussion of the parameters involved in the analytical expression of this function when manipulating the graph achieved. We report a first analysis of the data collected by asking twelve Mexican technical high school students to geometrically construct the sine function, where the angle measurement does not involve trigonometric ratios but their direct reading in radians. All the teams recognize, by the "form", a "wave" that they associate with the sine function in the first session of the teaching experiment. We focus on the production of one of the equipment that could discern that the arc measurement represents the measured angle without recognizing it as radians, arguing from the sine definition (trigonometric relation) that they know.

Key words: socio- epistemology, sine function, geoGebra

Introducción

La apropiación de “función”, en el ámbito escolar, ha sido estudiada desde diferentes miradas teóricas y en particular a través de la “covariación” (Johnson, 2015). En general, se reflexiona sobre funciones partiendo de conocer sus características mediante su lenguaje algebraico, numérico y gráfico. Pocos son los que reflexionan sobre funciones particulares tales como funciones cuadráticas (Ellis, 2011), funciones exponenciales (Castillo-Garsow, 2010), funciones trigonométricas (Shotz & Montiel, 2013; Moore, 2014), función logarítmica (Ferrari & Farfán, 2010) entre otras. Sin embargo, vemos que se va desdibujando el paradigma imperante años atrás sobre el estudio global de función dando lugar al estudio de funciones específicas donde posicionamos esta investigación. Respecto a la función senoidal, Demir y Heck (2013) evidencian que en la escuela existen dos acercamientos a funciones trigonométricas: razones trigonométricas y circunferencia unitaria. Presentan un modelo de entendimiento trigonométrico, diseñando tres momentos: trigonometría del triángulo rectángulo; círculo trigonométrico; y, gráficas de estas funciones. Reportan que los estudiantes de bachillerato presentan dificultades en convertir de grado a radianes y vincular el triángulo trigonométrico con el círculo trigonométrico unitario. Sin embargo, consideran que los estudiantes evolucionan hacia ser capaces de evaluar funciones trigonométricas en relación con la longitud de un arco.

Para Yiğit (2016) es factible considerar a la trigonometría como una especie de puente entre el razonamiento geométrico y el algebraico. Reporta dificultad en los estudiantes graduados en Matemáticas para el concepto de ángulo; observa que prevalece el método del triángulo rectángulo y su nemotecnia, y recomienda fomentar estudios donde se involucre la circunferencia unitaria con relaciones trigonométricas así como desarrollar tareas en entornos dinámicos. En tanto que Akkoc (2008) reporta que los profesores en formación entrevistados evidencian que el “concepto imagen” de *grado* predomina sobre la de *radian*, así como una concepción conflictiva entre π como ángulo en radianes y como número irracional al reflexionar desde la función. Moore, LaForest y Kim (2015) reportan sobre cómo profesores en formación relacionan la longitud de un arco de circunferencia, observan que el círculo unitario surge como estrategia de cálculo. Concluyen que para estos estudiantes considerar al círculo unitario como herramienta juega un papel fundamental en la conversión de medidas en relación con la longitud de un arco de la misma

A diferencia de los reportes anteriores, estudios de corte socioepistemológico se cuestionan sobre la construcción de saberes entorno de funciones trigonométricas, en búsqueda de argumentos originales que se han cercenado del discurso matemático escolar, elementos que no son discutidos en los reportes mencionados. En Montiel (2005), encontramos que si bien una caracterización funcional para el seno ya era conocida por Newton, fue en el *Introductio in analysin infinitorum* de Euler (1748, citado en Montiel 2005) donde se reconoce a las cantidades trigonométricas como relaciones funcionales trascendentes, junto con el logaritmo y la exponencial. Al seno se le consideraba como la longitud de segmentos de línea relativos a un círculo dado de radio R. Es decir, el seno del ángulo A es la mitad de la cuerda en un círculo, subtendida por el ángulo central 2A.

Para Montiel (2005), en *De quantitatibus trascendentibus ex Circulo ortis* (primer Tomo, Capítulo VIII del libro mencionado), Euler define las funciones trigonométricas como cantidades trascendentes que nacen del círculo y aunque no hace uso de la palabra radián, señala que π es la semicircunferencia de un círculo (de radio 1) y en consecuencia es la longitud del arco de 180°. Establece entonces, que *sen* 0 π = 0, *sen* π/2 = 1, *sen* π = 0; y, *sen* 3π/2 = -1. En este sentido, Buendía y Montiel (2009) observan que en esta obra coexisten la presentación de la medida de un ángulo en grados y en radianes; manejo ambiguo que, en la literatura actual se evidencia los conflictos que acarrea en tanto que Euler utiliza y transita entre ambas unidades (grados y radianes) sin complejidad, sin limitarse su método de calcular la cantidad trascendente al triángulo rectángulo.

En este reporte presentamos las reflexiones del lider de un equipo de estudiantes de bachillerato tecnológico mexicano sobre función seno desde un par de ejes cartesianos, un círculo unitario y una construcción geométrica. Nos cuestionamos en esta investigación sobre ¿Qué argumentos emergen en estudiantes de bachillerato que participan en un experimento de enseñanza que evidencien el desarrollo de su pensamiento covariacional?

■ Marco teórico

La socioepistemología, sustento teórico de esta investigación, propicia la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la Matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva profundizar en la reorganización del discurso matemático escolar y sus personajes.

Compartimos con Buendía (2004) y Cordero (2005), la idea de que desde las construcciones sociales generadas por ciertas prácticas así como desde los contextos argumentativos que surgen naturalmente en los grupos sociales, emerge la construcción del conocimiento matemático. Buendía (2004) rescata que argumentar es presentar una postura con la conciencia de que existe otra opinión, implícita o explícita, diferente de la propia. En este sentido Cordero (2005) establece una terna entre: los significados generados por los estudiantes en la interacción; los procedimientos; los procesos-objetos y el argumento refiriéndose a la reorganización de los anteriores.

Por otro lado, Krummheruer (1995, en Lavy, 2006) explicita que el aula de Matemáticas es una situación social donde emerge una conexión cercana entre la participación activa en acontecimientos áulicos y el desarrollo del concepto matemático discutido con el estudiante. Krummheruer (2015) considera que el foco principal debe estar sobre el análisis del proceso y no del producto, pues al analizarlo se descubre un cierto dominio de realidad, que está de algún modo solamente entre el nivel sociológico de los aspectos institucionalizados escolarmente y el nivel psicológico del individuo de conocimiento. Además, considera que*, el conocimiento matemático es un conocimiento argumentativo.*

Está basado en la participación de los estudiantes en "una práctica de explicar" (Garfinkel, 1967, p. 1) que es provechosa, de apoyo, y la iniciativa para los procesos de aprendizaje matemáticos de los estudiantes (p. 62). Más específicamente sus aportaciones sobre la argumentación, nos hace entenderla no sólo como un elemento deseable en una situación de aprendizaje, sino una condición fundamental para que este aprendizaje se dé, y por tanto, consideramos de interés no sólo preguntarnos cómo está estructurado un argumento realizado en el curso de la interacción, si no también, cómo el profesor y los alumnos participan en su producción (colectiva) interactiva.

Metodología

Consideramos como metodología de la investigación, el experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000), ya que nuestro propósito es percibir el desarrollo del pensamiento covariacional de estudiantes de bachillerato provocado por un diseño de aprendizaje en un ámbito discursivo que propicia GeoGebra analizando sus argumentaciones.

El experimento de enseñanza fue desarrollado en tres sesiones con 12 estudiantes de sexto semestre de bachillerato, un par de ellos con especialidad en electrónica y el resto en electromecánica. Los estudiantes, de 17 y 18 años, fueron organizados en cuatro equipos de tres jóvenes, de los cuales sólo dos fueron mujeres y todos participaron libremente en la puesta en escena.

Figura 1. Diseño del experimento de enseñanza

Las sesiones fueron videograbadas así como recopilado las evidencias escritas de los estudiantes. En cada equipo se colocó una videocámara y un grabador que fueron controlados por cuatro auxiliares de investigación. Se contó con un testigo, en este caso el profesor del grupo, y el investigador principal desarrolló las actividades (Fig.1)

En los programas de Bachillerato Tecnológico encontamos en los cursos de Matemáticas que en segundo semestre cursan Geometría y Trigonometría donde se les pesentan las relaciones trigonométricas, en particular, razones, funciones, círculo unitario, identidades y resolución de triángulos. En cuarto y quinto semestre se desarrollan los Cálculos diferencial e integral, invitándolos a reflexionar sobre la variación y la acumulación, en tanto que en sexto semestre se espera articular los saberes matemáticos en la unidad de aprendizaje "Matemática aplicada", ideas que se retoman y profundizan en el nivel superior que se extiende incluso al uso de varias variables. En cursos de especialidad también se acercan a la función seno priorizando sus características en diferentes actividades (Fig. 2)

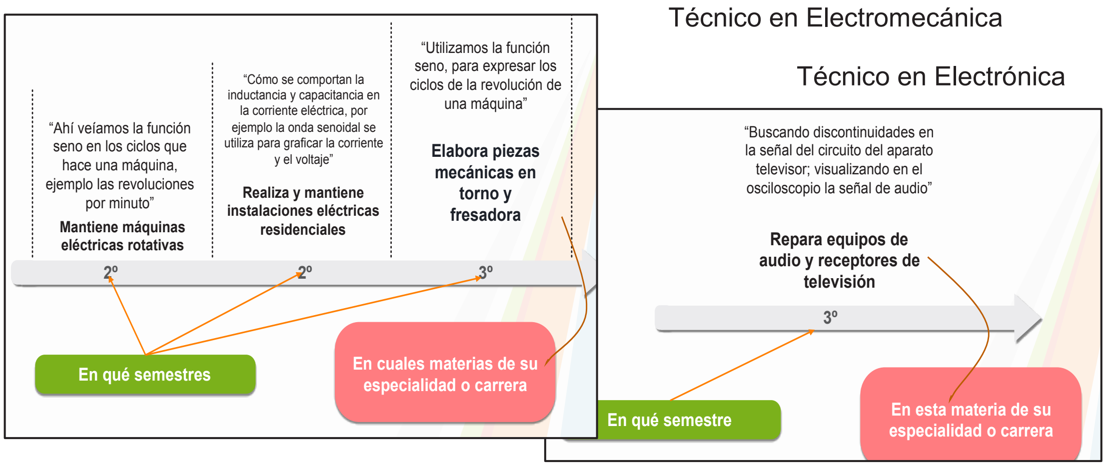


Figura 2. Uso escolar de función seno

En la primera sesión se proponen, en el diseño de aprendizaje, tres actividades. El objetivo de la primera es familiarizarlos con el espacio de GeoGebra y percibir la forma de la curva, quizás reconocerla como la función seno. La segunda se destina a sobrepasar las limitantes de la geometría dinámica al solicitarles que construyan puntos hacia la derecha (implica reconocer el período de la función) y hacia la izquierda (reconocer la simetría central y el papel del signo menos aplicado a cantidades positivas "arco"). La tercera, pretende reflexionar sobre por qué creen los estudiantes que se utiliza el arco y la altura para trazar los puntos de la curva así como de dos características de la misma: "es función" y "es función sobre".

En la segunda sesión se busca desafiarlos a agrandar el círculo unitario que provocará alterar los parámetros de la expresión algebraica y propiciar la reflexión sobre ¿qué varía? ¿Cómo varía? ¿qué pasa con la forma de la curva? ¿qué mide el arco en realidad? ¿cómo ajustar los puntos? La tercera sesión se destina a escuchar a los jóvenes sobre en qué actividades reconocen ellos el uso de la función seno.

En este artículo reportamos los argumentos presentados por el Equipo 3 conformado por tres muchachos uno de los cuales fungió como líder y portavoz (E1) que evidencia cierta articulación de varios elementos del diseño.

Resultados

En la primera sesión se inició la construcción geométrica de puntos de la función seno mediante el trazo de un punto sobre la circunferencia unitaria que determinaría un punto de la función al medir el arco que subtiende y la recta horizontal que lo atraviesa. El equipo 3 utilizó varios minutos para trazar puntos de manera aleatoria, sin un orden, sólo con el fin de percibir la "onda" que iba emergiendo. Comienzan a buscar una relación entre el aumento de "*y*" y el del "arco" (Episodio 1).

Episodio 1: Relación entre altura de "y" y el arco subtendido

E1: Es que, lo que pasa es que, en este punto que graficamos el primer punto que es "B", el radio vale exactamente 1 y conforme va subiendo la longitud en "*y*" va aumentando y por eso… cuando llega, cuando el radio está exactamente a 90 grados alcanza, yo creo que alcanza su punto máximo, entonces ya cuando alcanza 90 grados ya pasa a 100, entonces ahora el radio… la longitud de "*y*" va disminuyendo.

Testigo 1: Pero ¿es el radio el que va disminuyendo?

E1: No, es la longitud de "*y*".

Testigo 1: Y ¿quién es la longitud de "*y*"?

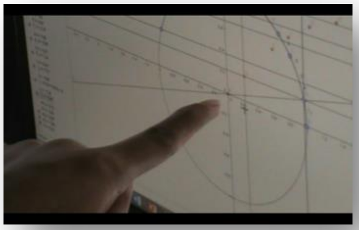
E1: aahh, Cómo?

Testigo 1: Tú me dices, hay un radio que es 1 y la longitud de "*y*" está cambiando, pero la longitud de "*y*" respecto al círculo donde tú estas marcando, ¿con qué lo relacionas?

E1: Es que eso está relacionado con el cateto… si lo trazáramos sería un triángulo rectángulo y la hipotenusa sería el radio y el eje "*x*" nunca cambiaría ese sería el cateto adyacente, lo que cambiaria solamente sería el cateto opuesto y creo que por eso se pone una … ecuación ehh… digo una función senoidal, porque el seno es igual al cateto opuesto entre la hipotenusa.

Al observar la variación de la "altura de *y*" y los ángulos que están involucrados "E1" reconoce la función seno. Respalda su argumento imaginando un triángulo rectángulo y utilizando la definición de seno, es decir la razón trigonométrica "cateto opuesto sobre hipotenusa". No duda entonces que la variación del seno aumenta hasta 90º y disminuye nuevamente hasta 180º. Sin embargo, no tiene aún una respuesta sobre porqué se utiliza el arco. Sin embargo, percibe una gran relación entre "ángulo y arco" (Episodio 2)

Episodio 2: "ese arco es lo que vale el ángulo



Maestra: […] ¿Qué es lo que estás mirando? […] esto que decías de los catetos y el triángulo, ¿cuál sería el triángulo que visualizas?

E1: Éste y después la perpendicular a ésta.

Maestra: Ah ok

E1: Y a este ángulo es el que está variando y esta recta sube y por lo tanto el ángulo está variando.

Maestra: […] ¿y por qué creen que medimos el arco?

E1: ¿Este arco? Porque ese arco es lo que vale el ángulo, porque esté ángulo es igual a este arco. Entonces le digo que sólo lo que varia es el eje "y" esta longitud que si la ponemos hasta acá ya el triángulo sería más amplio… eso… por eso que se forman esos puntos, por eso creo que suben y por eso creo que luego bajan

En la segunda sesión se los desafía a ajustar los puntos que surgen al "agrandar" el círculo unitario. Todos los puntos están vinculados al círculo inicial pues son construidos midiendo el arco que subtiende y la altura que determina, por tanto el radio del círculo está involucrado (Fig. 3).

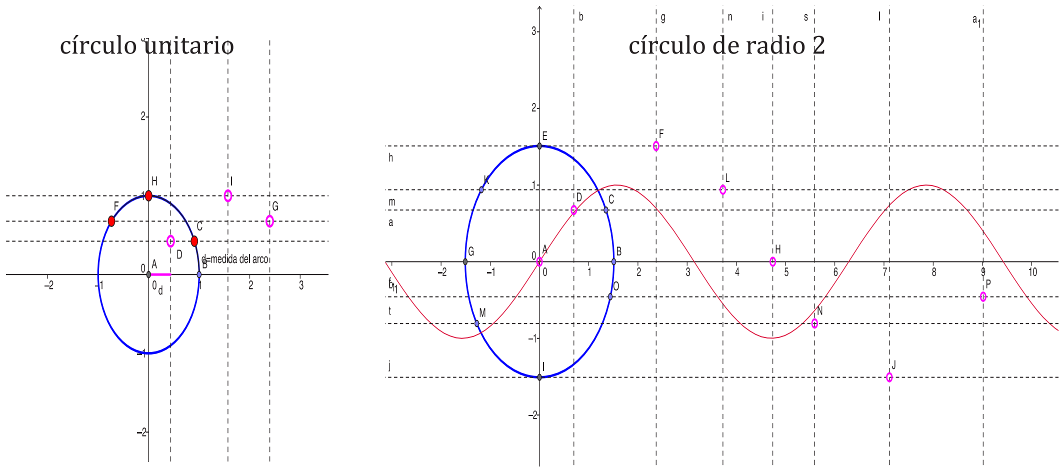


Figura 3. *Construcción de función seno*

El equipo 3 intenta "atrapar" los puntos multiplicando por una constante la función seno (Fig. 4a) para luego manipular el argumento de la función (Fig. 4b) que les permite observar, en ambos casos, los efectos globales, la primera ataca la amplitud (la altura) en tanto que el segundo varía el período. Luego de varios intentos perciben que se trata de alterar ambos parámetros al mismo tiempo y que el radio del círculo es primordial (Fig. 4c)

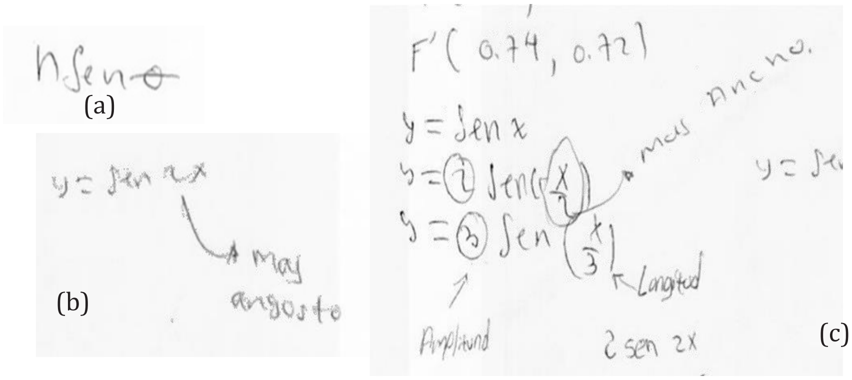


Figura 4. *Exploración para ajustar la curva*

Conclusiones

Emerge, en la gestión del diseño de aprendizaje, un uso intuitivo de los radianes en tanto se construye un acercamiento a la función seno ampliando la discusión a los parámetros que se involucran en la expresión analítica de esta función. El equipo 3, acepta la medida de los arcos como representante de los ángulos medidos en grados sin discutirlo. Centran su argumento en la definición del seno (relación trigonométrica) sin reconocer los radianes como unidad de medida. Logran asociar en la segunda sesión la medida del radio con el efecto que produce en los puntos construidos involucrando los parámetros (amplitud-período), lo cual conlleva discutir sobre cómo medir arcos subtendidos en un círculo y por ende el uso de radianes. Consideramos que este equipo logra percibir la covariación senoidal, pues articulan los “puntos” (modelo geométrico) con “la forma” (modelo gráfico) que los ajusta requiriéndose para ello una expresión algebraica (modelo algebraico), es decir, lograron una red de modelos, que nos permite establecer que se sumergieron en la práctica de modelar al participar en el experimento de enseñanza.

Todos los equipos reconocen por su “forma” una “onda” asociándola rápidamente a la función seno, elementos que se constata en la tercera sesión donde los equipos presentan ejemplos de donde ellos usan la función. El equipo 3 explica el uso de una máquina donde se percibe que les es suficiente reconocer un ciclo que se repite regularmente, pese a que se trataba de una variación lineal la que describe el movimiento de la pieza, imaginándolo como una “onda” y por tanto involucran a la función seno.

Los resultados encontrados en esta investigación nos dan aliento a continuar explorando el diseño de aprendizaje, pues se vislumbró articulación de los estudiantes entre las razones trigonométricas y el estudio de variaciones senoidales.

Referencias Bibliográficas

Akkoc, H. (2008).Pre-service mathematics teachers' concept images of radian, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 39*(7), 857-878.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. (Tesis de Doctorado no publicada). Cinvestav, México.

Buendía, G. & Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 1287-1296) CLAME.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Castillo-Garsow, C. C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. (Tesis de doctorado no publicada). USA: Arizona State University.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(3), 265- 286.

Demir, Ö., & Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. En E. Faggoano & A. Montane (Eds.) *Proceeding of ICMTM 11* (pp. 119-124). University Bali, Italy.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 215–238). Berlin, Germany: Springer.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics 89*(1), 89-110.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp.51-74). Springer.

Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behavior 25*, 153-169.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. (Tesis de Doctorado no publicada). CICATA-IPN, México.

Moore, K. C. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138

Moore, K., LaForest, K. & Kim, H. (2015). Putting the unit in pre-service secundary teacher´s unit circle. *Educational Studies in Mathematics 92*(2), 221-241.

Shotz, O. & Montiel, G. (2013) Bases de un diseño didáctico para la construcción de las razones trigonométricas en el contexto geométrico del círculo. En Landa (Ed.) *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp.347-354). Red Cimate.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267–307). Hillside, NJ: Erlbaum.

Yiğit Koyunkaya, M. (2016). Mathematics education graduate students’ understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-21.